

# Varijansa

- Isključivo pozitivna veličina,  $[0, +\infty)$
- Najviše korišćena u kvantitativnim disciplinama (statistika, ekonometrija)

## Varijansa populacije

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{N} - \mu^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

## Varijansa uzorka

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$s^2 = \frac{\sum x^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

$$s = \sqrt{s^2}$$

# Varijansa i Standardna devijacija – grupisani podaci

## Varijansa populacije

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \mu)^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \mu^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

## Varijansa uzorka

$$s^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$s^2 = \frac{\sum fx^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

$$s = \sqrt{s^2}$$

# Primjer 1.

- Na svih sedam fakulteta jednog univerziteta u bibliotekama postoji sledeći broj naslova stručne literature: 83, 510, 33, 256, 401, 47, 23. Da li je u pitanju uzorak ili populacija? Odrediti varijansu i standardnu devijaciju.

# Rješenje

- Populacija!

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{83 + 510 + 33 + 256 + 401 + 47 + 23}{7} = 193,28$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{N} - \mu^2 = \frac{\sum (83^2 + 510^2 + \dots + 23^2)}{7} - 193,28^2 = 70828,58$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{70828,58} = 266,136$$

## 2. Varijansa i stand. devijacija

Poslednja cijena određene akcije u uzorku od 8 dana trgovanja na berzi bila je: 430,2 402,01 395,02 420 410 381 380,12 360. Ako je  $\sum x^2 = 1266477$ , standardna devijacija je:

- 523,7

$$\bar{x} = \frac{3178,35}{8} = 397,294$$

- 23,1

- -2,6

$$s^2 = \frac{1266477 - 8(397,294)^2}{8-1} = 533,83$$

- 5,44

$$s = \sqrt{s^2} = 23,1$$

# Relativne mjere disperzije

- Koeficijent varijacije
  - Procentualni odnos između standardne devijacije i prosjeka
  - Veći koef. varijacije – veća disperzija

$$V = \frac{\sigma}{\mu} 100$$

- Standardizovano (normalizovano) odstupanje

# Standardizovano odstupanje

- Odstupanje bilo koje vrijednosti obilježja od aritmetičke sredine izraženo u jedinicama standardne devijacije
- Pogodno za upoređivanje varijacija iz dvije ili više statističkih serija čija su obilježja izražena različitim jedinicama mjere
- Upotreba – statističko zaključivanje

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

# Zadatak 3

- Na slučajan način od 140 prodavnica mješovite robe izabrano je devet i popisani dnevni pazar u hiljadama eura: 4, 5, 6, 10, 14, 17, 21, 28 i 30. Izračunati varijansu, koeficijent varijacije i stand. odstupanje.

# Rješenje

$(x_i)$	$x_i^2$
4	16
5	25
6	36
10	100
14	196
17	289
21	441
28	784
30	900
Ukupno:	2787

$$\bar{x} = \frac{135}{9} = 15$$

$$s^2 = \frac{2787 - 9(15)^2}{9 - 1} = 95,25$$

# Rješenje

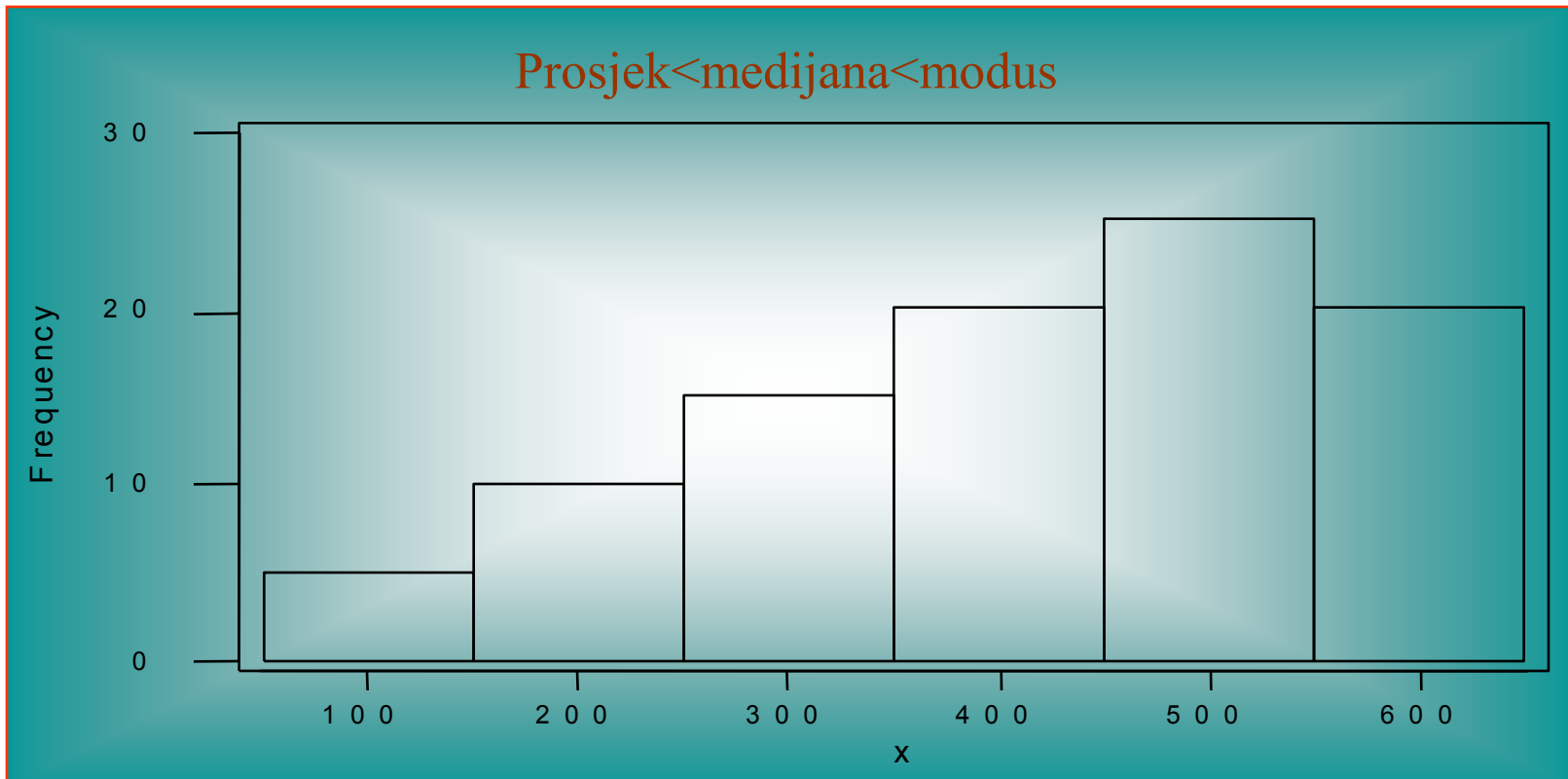
$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{95,25} = 9,76$$

$$V = \frac{\sigma}{\mu} 100 = \frac{9,76}{15} 100 = 65,05\%$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{10 - 15}{9,76} = -0,512$$

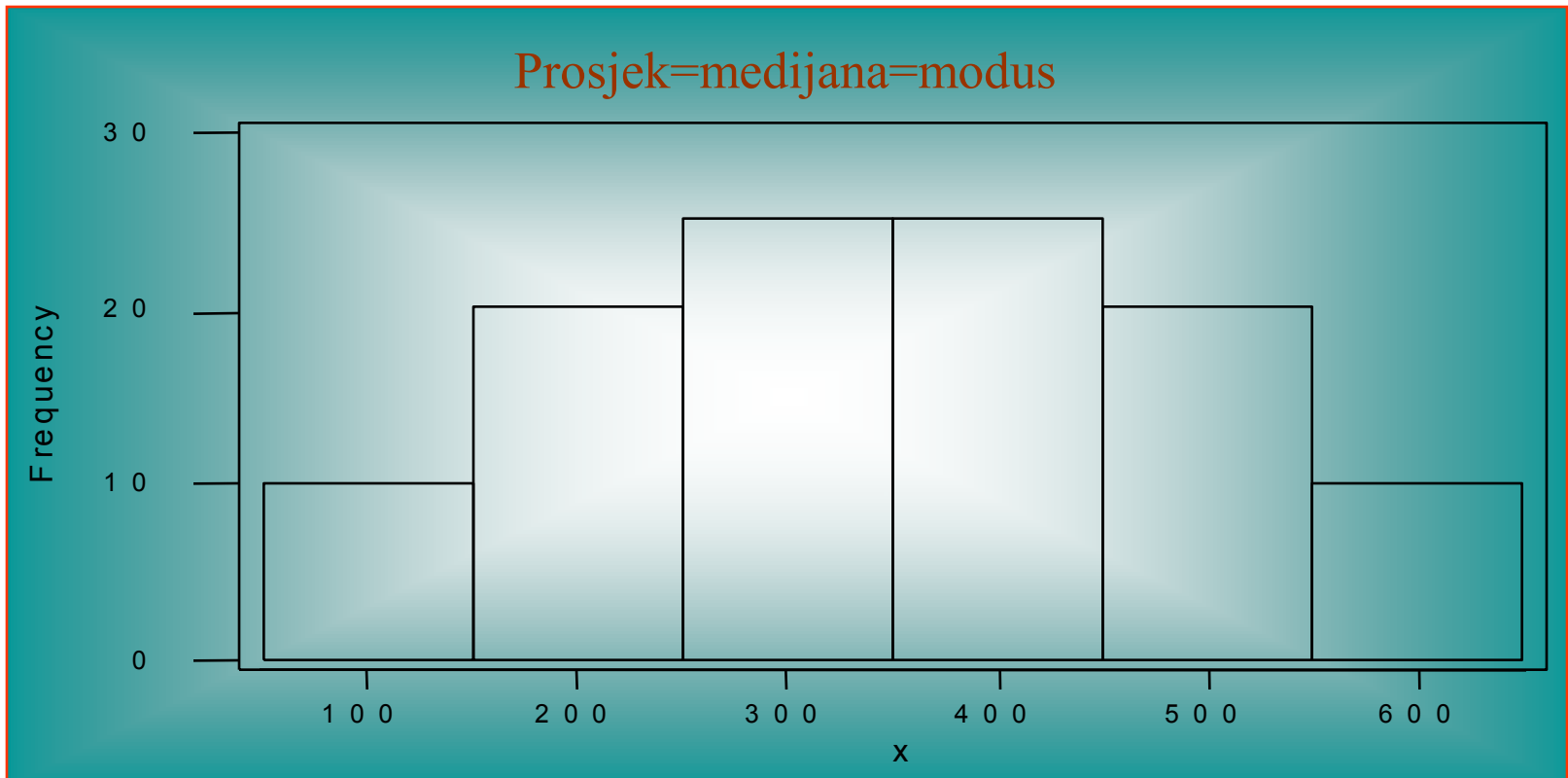
# Asimetrija

## Asimetrija ulijevo (negativna)



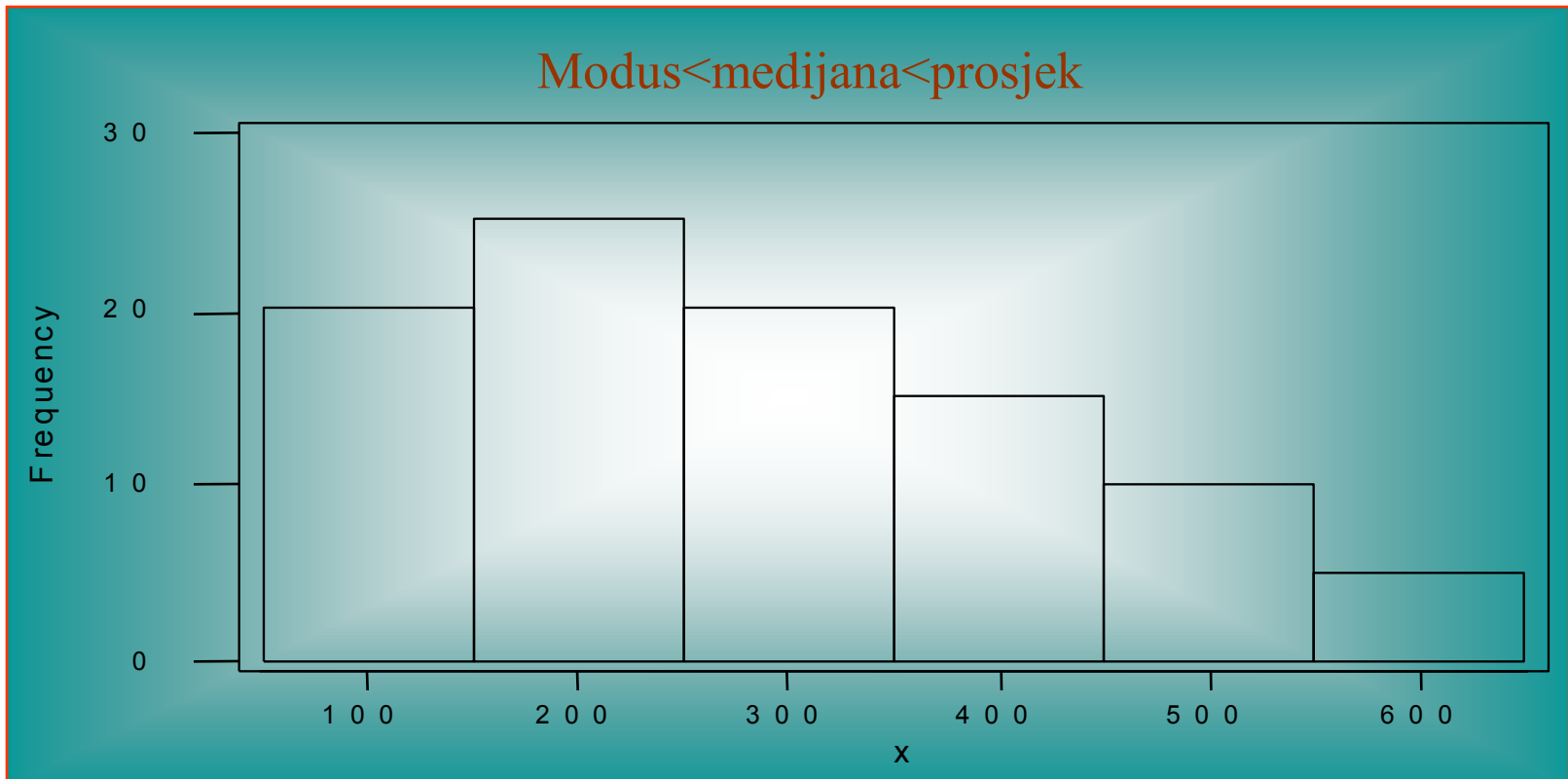
# Asimetrija

## Simetrija



# Asimetrija

## Asimetrija udesno (pozitivna)



# Zadatak 4

- Na osnovu rasporeda 800 domaćinstava prema mjesečnoj potrošnji šećera, izračunati prosjek, modus i medijanu i prokomentarisati oblik datog rasporeda:

Mj. potrošnja	Broj domaćinstava
x	f
2	90
3	130
4	180
5	210
6	90
7	80
8	20
Ukupno:	800

# Rješenje

x	f	fx	fk
2	90	180	90
3	130	390	220
4	180	720	400
5	210	1050	610
6	90	540	700
7	80	560	780
8	20	160	800
Ukupno:	800	3600	

$$\mu = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{3600}{800} = 4,5$$

$$Me = \frac{\frac{x_{800}}{2} + \frac{x_{800+1}}{2}}{2} = \frac{x_{400} + x_{401}}{2} = \frac{4 + 5}{2} = 4,5$$

# Rješenje - nastavak

$$M_0 = 5$$

- Negativna asimetrija (mala-umjerenjena)

# Zadatak 5

- U skupu od 50 telefonskih poziva neke telefonske kompanije, vrijeme trajanja razgovora imalo je sledeći raspored. Naći prosjek, modus i medijanu, pa na osnovu njih odrediti simetriju rasporeda. Kakve pakete kompanija treba da favorizuje?

Trajanje razgovora	Broj razgovora
$x$	$f$
0-2	15
2-4	20
4-6	10
6-8	5
Ukupno:	50

# Rješenje

x	f	x	fx	fk
0-2	15	1	15	15
2-4	20	3	60	35
4-6	10	5	50	45
6-8	5	7	35	50
Ukupno:	50		160	

$$\mu = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{160}{50} = 3,2$$

$$L_1 = 2$$

$$f_1 = 15 \quad f_3 = 10$$

$$f_2 = 20$$

$$i = 2$$

$$Mo = 2 + \frac{5}{5+10} \cdot 2 = 2,67$$

# Rješenje - nastavak

$$Me = L_1 + \frac{\frac{N}{2} - \sum f_1}{f_{Me}} i = 2 + \frac{\frac{50}{2} - 15}{20} 2 = 3$$

- $Mo < Me < \text{Prosjek}$
- Pozitivna asimetrija
- Kompanija treba da favorizuje kraće razgovore, i da nudi povoljnije pakete koji ih stimulišu.

# Zadatak 6

- Mjesečni prosjek zaposlenih u jednom preduzeću iznosio je 2002. godine 60000 sa stand. devijacijom 250, a 2003. 4000 sa st. dev. 200. Da li je stabilnost zaposlenih bila veća 2002. ili 2003. godine?

$$\mu_{2002} = 60000$$

$$\sigma_{2002} = 250$$

$$\mu_{2003} = 4000$$

$$\sigma_{2003} = 200$$

# Rješenje

- Koef. Varijacije! Ako je veći, pokazuje manju stabilnost (veću varijaciju) i obrnuto
- Dakle, stabilnost zaposlenih je bila veća 2002. godine!

$$V_{2002} = \frac{250}{60000} 100 = 0,416\%$$

$$V_{2003} = \frac{200}{4000} 100 = 5\%$$

# 7. Varijansa i stand. devijacija

Dati su podaci za svih 25 zaposlenih u jednoj firmi o vremenu provedenom putujući na posao (u minutima), gdje je  $\sum fx = 535$   $\sum fx^2 = 14825$ . St. devijacija je:

- 19,14
- **11,62**
- 8,67
- 135,04

# 8. Kvartili

Dati su podaci o broju aktiviranja detektora metala od strane putnika na jednom aerodromu u 15 dana: 7 2 12 13 0 8 10 15 3 5 14 20 1 11 4. Odrediti interkvartilnu razliku.

$$Iq=Q3-Q1$$

# 8. rješenje

- 7 2 12 13 0 8 10 15 3 5 14 20 1 11  
4
- 0 1 2 3 4 5 7 8 10 11 12 13 14 15  
20
- $(n+1)75/100=16*75/100=12$
- 12-ti član poredan u nizu!! To je  $Q3=13!$
- $(n+1)25/100=16*25/100=4!$  To je  $Q1=3$
- $Iq=13-3=10$

# Modus

9 Ako je poznata statistička serija sa ocjenama: A, C, C, B, D, E, A, A, modus je:

- 3
- Ne može se odrediti
- **A**
- Serija nema modus

10 Prema skupu podataka: 1 4 4 5 11 7 8 19 5 7, raspored je:

- **Multimodalan**
- Bimodalan
- Modus nije definisan
- Unimodalan

# 11. zadatak

Ocjena	A	B	C	D	E	$\Sigma$
Broj studenata	10	8	64	93	106	281

Ocjene iz Matematike na Ekonomskom fakultetu u Podgorici u 2010/2011. godini date su tabelom.

1) Modus je:

- 106
- **E**
- C
- 64

# Prosjek

Ocjena	A	B	C	D	E	$\Sigma$
Broj studenata	10	8	64	93	106	281

2) Prosječna ocjena je:

- Ne može se odrediti
- E
- C
- **7.014**

$$\mu = \frac{\sum fx}{N} = \frac{10 \cdot 10 + \dots + 106 \cdot 6}{281} = 7.014$$

# 12. Frekvencije

Na odgovor da li je posao stresan, 10 upitanih osoba je odgovorilo «veoma», 14 «malo», a 6 «nimalo».

1) Apsolutne frekvencije su :

- 1; 1; 1.
- $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{3}$ .
- $\frac{10}{30}$ ;  $\frac{14}{30}$ ;  $\frac{6}{30}$ .
- **10; 14; 6.**

2) Relativne frekvencije su :

- 1; 1; 1.
- $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{3}$ .
- **$\frac{10}{30}$ ;  $\frac{14}{30}$ ;  $\frac{6}{30}$ .**
- 10; 14; 6.